Chapitre C

Transformation de Fourier

C.1. Transformation de Fourier des fonctions sommables

Définition C.1.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de f est la fonction $\mathcal{F}f$, ou encore $\hat{f}$, définie sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx\,.$$

Le théorème de convergence dominée et le théorème de Fubini permettent facilement de démontrer le résultat suivant.

Proposition C.1.2. *Soient f, g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors*

a) $\mathcal{F}f$ est continue sur $\mathbb{R}^d$, $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$ et $\mathcal{F}f(\xi)$ tend vers zéro à l'infini ;

b) On a $\mathcal{F}(f \star g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.

La proposition suivante montre que la transformation de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini.

Proposition C.1.3. *Soit α un multi-indice dans $\mathbb{N}^d$ et soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Si $x^\alpha\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors*

$$\mathcal{F}(x^\alpha\varphi)(\xi) = i^\alpha \partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(\xi) \tag{C.1}$$

et si $\partial^\alpha\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\mathcal{F}(\partial_x^\alpha\varphi)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}\varphi(\xi)\,. \tag{C.2}$$

Démonstration. Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, telle que $x^\alpha\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\partial_{\xi_j}(e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)) = -ix_j e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)$$

et comme

$$\left|ix_j e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\right| = |x_j\varphi(x)|$$

on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour en déduire que

$$\partial_{\xi_j}(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(-ix_j\varphi)(\xi)\,.$$

Par récurrence on obtient

$$\partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (-i)^\alpha \mathcal{F}(x^\alpha\varphi)(\xi)\,,$$

d'où le résultat (C.1). Pour démontrer (C.2) commençons par étudier le cas $|\alpha| = 1$. Considérons une suite régularisante ζ_ε et posons

$$\varphi_\varepsilon := \zeta_\varepsilon \star \varphi\,.$$

Alors

$$\varphi_\varepsilon \longrightarrow \varphi \quad \text{et} \quad \partial_{x_j}\varphi_\varepsilon \longrightarrow \partial_{x_j}\varphi \quad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{R}^d)\,.$$

Une intégration par parties montre que

$$\int e^{-ix_j\xi_j}\partial_{x_j}\varphi_\varepsilon(x)\, dx_j = i\xi_j \int e^{-ix_j\xi_j}\varphi_\varepsilon(x)\, dx_j$$

donc

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi_\varepsilon)(\xi) = i\xi_j\mathcal{F}\varphi_\varepsilon(\xi)\,.$$

Comme

$$\|\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi_\varepsilon) - \mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi)\|_{L^\infty} \leq \|\partial_{x_j}\varphi_\varepsilon - \partial_{x_j}\varphi\|_{L^1}$$

et de même pour $\mathcal{F}\varphi_\varepsilon(\xi) - \mathcal{F}\varphi(\xi)$, le résultat suit. Le cas général s'obtient de même. La proposition est démontrée. $\square$

Remarque. Pour démontrer (C.2) dans le cas $d = |\alpha| = 1$ (ensuite on généralise par récurrence et Fubini) on peut aussi raisonner directement sur φ en remarquant que si φ et φ' sont intégrables alors φ s'identifie à une fonction continue (et donc elle tend vers zéro à l'infini ce qui justifie l'intégration par parties). En effet pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé on pose

$$\phi(x) := \int_a^x \varphi'(t)\,dt$$

qui est continue, et vérifie pour toute fonction test ψ (c'est une application du théorème de Fubini)

$$\langle \phi, \psi' \rangle = -\langle \varphi', \psi \rangle\,.$$

Alors $\phi - \varphi$ est une distribution constante notée C et $\tilde{\varphi} := \phi - C$ est continue, égale à φ presque partout, et on a en outre

$$\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(y) = \int_x^y \varphi'(t)\,dt\,.$$

Lemme C.1.4. *Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive de taille d, et posons*

$$G_A(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d det(A)}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x)\cdot x}\,, \quad x \in \mathbb{R}^d\,.$$

Alors

$$\mathcal{F}G_A(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(A\xi)\cdot\xi}\,.$$

Démonstration. Notons que G_A est clairement un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. La matrice A est symétrique réelle donc on peut écrire

$$A = QDQ^t\,, \quad \text{avec} \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$$

avec Q matrice orthogonale et D matrice diagonale avec tous les λ_i réels. Par ailleurs quitte à permuter l'ordre des vecteurs propres on peut toujours supposer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$, et comme $A = A^t > 0$ on a $\lambda_d > 0$.

La première étape consiste à se ramener au cas où $d = 1$. Dans l'intégrale définissant la transformée de Fourier de G_A on pose

$$y := Q^t x \quad \text{et} \quad \eta := Q^t\xi\,.$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\int e^{-ix\cdot\xi} G_A(x)\, dx &= \Big(\prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}}\Big) \int e^{-iQ^t x\cdot Q^t\xi} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x)\cdot x}\, dx \\
&= \Big(\prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}}\Big) \int e^{-iy\cdot\eta} e^{-\frac{1}{2}(D^{-1}y)\cdot y}\, dy \\
&= \Big(\prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}}\Big) \int \Big(\prod_{j=1}^{d} e^{-iy_j\eta_j} e^{-\frac{1}{2}\lambda_j^{-1}y_j^2}\Big)\, dy_1 \dots dy_d \\
&= \prod_{j=1}^{d} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}} e^{-iy_j\eta_j} e^{-\frac{1}{2}\lambda_j^{-1}y_j^2}\, dy_j\,.
\end{aligned}
$$

Puisque $\lambda_j > 0$ pour tout j, le théorème de Fubini implique qu'il suffit de faire le calcul pour $d = 1$. Soit donc $\lambda > 0$ et posons

$$g_\lambda(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}\,.$$

Alors g_λ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$g'_\lambda(x) = \frac{x}{\lambda} g_\lambda(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

En appliquant la transformée de Fourier à chaque membre de cette égalité et en utilisant la Proposition C.1.3 il vient

$$i\xi\mathcal{F}g_\lambda(\xi) = \frac{1}{i\lambda}(\mathcal{F}g_\lambda)'(\xi)$$

et donc

$$\mathcal{F}g_\lambda(\xi) = Ce^{-\frac{1}{2}\lambda\xi^2}\,.$$

Comme de plus

$$\mathcal{F}g_\lambda(0) = C = \int g_\lambda(x)\, dx = 1$$

on en déduit le résultat souhaité. □

Théorème C.1.5 (Inversion de Fourier)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a presque partout sur $\mathbb{R}^d$*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi =: \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(x)\,.$$

Démonstration. Si nous calculons la valeur au point x de $\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}\mathcal{F}f(\xi)\, d\xi$ nous trouvons

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi} f(y)\, dy\Big)\, d\xi$$

mais le théorème de Fubini ne peut s'appliquer. L'idée est d'évaluer à la place l'intégrale

$$I_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{2}} f(y)\, dy d\xi\,,$$

de deux façons différentes.

On commence par intégrer d'abord par rapport à y, on a alors

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{2}} \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi$$

et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue il vient
$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}f(\xi)\,d\xi\,.$$
Mais en intégrant d'abord par rapport à ξ on obtient par le Lemme C.1.4
$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\varepsilon)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}}\,dy\,.$$
Le théorème de convergence dominée permet de montrer que $I_\varepsilon(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout x et le résultat suit par unicité de la limite. □

C.2. Transformation de Fourier des fonctions de la classe de Schwartz

Théorème C.2.1. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$ avec les notations du Théorème* C.1.5.

Démonstration. On déduit facilement de la Proposition C.1.3 que la transformée de Fourier applique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. En effet on a
$$(i\xi)^\alpha(i\partial_\xi)^\beta\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\partial_x^\alpha(x^\beta\varphi(x))\,dx$$
donc
$$\begin{aligned}\sup_{|\alpha|\le p,|\beta|\le q}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left|\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\mathcal{F}\varphi(\xi)\right| &\le \sup_{|\alpha|\le p,|\beta|\le q}\left\|\partial_x^\alpha(x^\beta\varphi)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\le C\sup_{|\alpha|\le p,|\beta|\le q}\left\|\langle x\rangle^{|\beta|}\partial_x^\alpha\varphi\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$
par la formule de Leibniz. On remarque que
$$\int\langle x\rangle^{|\beta|}|\partial_x^\alpha\varphi(x)|\,dx \le \int\langle x\rangle^{-d-1}\langle x\rangle^{|\beta|+d+1}|\partial_x^\alpha\varphi(x)|\,dx$$
donc puisque $x\mapsto\langle x\rangle^{-d-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ on obtient
$$\sup_{|\alpha|\le p,|\beta|\le q}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left|\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\mathcal{F}\varphi(\xi)\right| \le C\sup_{|\alpha|\le p,|\beta|\le q+d+1}\left\|\langle x\rangle^{|\beta|}\partial_x^\alpha\varphi(x)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\,.$$
La transformée de Fourier applique donc bien $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même et on conclut grâce au théorème d'inversion de Fourier C.1.5 puisque φ et $\mathcal{F}\varphi$ sont en particulier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. □

Théorème C.2.2 (Formule de Parseval)**.** *Soient φ, ψ et Ψ trois fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors*

a) $\displaystyle\int\mathcal{F}\varphi(\xi)\psi(\xi)\,d\xi = \int\varphi(x)\mathcal{F}\psi(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int\varphi(x)\overline{\Psi}(x)\,dx = (2\pi)^{-d}\int\mathcal{F}\varphi(\xi)\overline{\mathcal{F}\Psi}(\xi)\,d\xi\,.$

Démonstration. Grâce au théorème de Fubini on a
$$\begin{aligned}\int\mathcal{F}\varphi(\xi)\psi(\xi)\,d\xi &= \int\Big(\int e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)\,dx\Big)\psi(\xi)\,d\xi\\ &= \int\Big(\int e^{-i\xi\cdot x}\psi(\xi)\,d\xi\Big)\varphi(x)\,dx\\ &= \int\varphi(x)\mathcal{F}\psi(x)\,dx\,,\end{aligned}$$
ce qui démontre *a*).

Soit maintenant $f := (2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}\Psi}$, qui vérifie
$$\mathcal{F}f(x) = \overline{\Psi}(x)\,.$$

En appliquant a) à φ et f on trouve

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-d}\int \mathcal{F}\varphi(\xi)\overline{\mathcal{F}\Psi}(\xi)\,d\xi &= \int \mathcal{F}\varphi(\xi)f(\xi)\,d\xi\\ &= \int \varphi(x)\overline{\Psi}(x)\,dx\end{aligned}$$

et la proposition est démontrée. □

C.3. Transformation de Fourier des distributions tempérées

La transformation de Fourier des distributions tempérées se définit par dualité, au vu du Théorème C.2.2.

Définition C.3.1. *Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution tempérée. La transformée de Fourier de S est la distribution $\mathcal{F}S$ définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle \mathcal{F}S, \varphi\rangle := \langle S, \mathcal{F}\varphi\rangle\,.$$

Notons qu'au vu de la démonstration du Théorème C.2.1, la distribution $\mathcal{F}S$ ainsi définie est bien une distribution tempérée.

Remarque. On a aussi

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle \overline{\mathcal{F}}S, \varphi\rangle = \langle S, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle\,.$$

Théorème C.3.2. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le Théorème C.2.1 en notant que pour toute distribution $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}S, \varphi\rangle &= \langle S, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi\rangle = (2\pi)^d\langle S, \varphi\rangle\,,\\ \langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}S, \varphi\rangle &= \langle S, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle = (2\pi)^d\langle S, \varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Le résultat suit. □

C.4. Transformation de Fourier des fonctions de carré sommable

On note pour toutes fonctions φ et ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$(\varphi|\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} := \int \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx\,.$$

On rappelle qu'il s'agit d'un produit scalaire qui fait de $L^2(\mathbb{R}^d)$ un espace de Hilbert.

Théorème C.4.1 (Plancherel)**.** *La transformation de Fourier est un isomorphisme de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$. En outre on a*

$$(\varphi|\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}(\mathcal{F}\varphi|\mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

pour tous φ et ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ est une isométrie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même pour la norme L^2, c'est-à-dire que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire défini ci-dessus. Soient donc φ et ψ deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \mathcal{F}\varphi(\xi)\overline{\mathcal{F}\psi}(\xi)\,d\xi$$

par la formule de Parseval (Théorème C.2.2 b)) donc $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire et donc la norme L^2, pour les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il en est de même de $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\overline{\mathcal{F}}$.

Il s'agit donc maintenant d'étendre ce résultat aux éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, il est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit donc $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors par isométrie, la suite $(\mathcal{F}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et elle converge donc vers une limite g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ s'identifiant à un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $(\mathcal{F}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{F}f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ puisque pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \mathcal{F}f_n, \varphi\rangle = \langle f_n, \mathcal{F}\varphi\rangle \longrightarrow \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle$$

et donc par unicité de la limite $\mathcal{F}f = g$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}f$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par continuité de la norme on a de plus

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,.$$

En appliquant le même raisonnement à $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\overline{\mathcal{F}}$ on conclut que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\overline{\mathcal{F}}$ et $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ sont deux isométries de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, dont les composées à droite et à gauche sont égales à l'identité, et le théorème est démontré. □

C.5. Transformation de Fourier des distributions à support compact

On définit pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ la fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$

$$e_\xi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{-ix\cdot\xi}\,. \end{array}$$

Proposition C.5.1. *Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de E est la fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ donnée par*

$$\mathcal{F}E(\xi) := \langle E, e_\xi\rangle\,.$$

De plus $\mathcal{F}E$ est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées, au sens où pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante C tels que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial^\alpha \mathcal{F}E(\xi)| \le C\langle\xi\rangle^m\,.$$

Démonstration. Soit la fonction

$$v(\xi) := \langle E, e_\xi\rangle\,.$$

En remarquant que

$$v(\xi) = \langle E, \chi e_\xi\rangle$$

avec $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ valant 1 au voisinage du support de E, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le crochet qui implique que v est de classe C^∞ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^\alpha v(\xi) &= \langle E, \chi\partial_\xi^\alpha e_\xi\rangle \\ &= \langle E, (-i\,\cdot)^\alpha \chi e_\xi\rangle\,.\end{aligned}$$

Montrons que v est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées. Soit K un voisinage compact du support de E et p l'ordre de E. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe une constante C telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial_\xi^\alpha v(\xi)| \le C \sup_{x\in K}\sup_{|\beta|\le p} \left|\partial_x^\beta\big(x^\alpha \chi(x) e_\xi(x)\big)\right| \le C\langle\xi\rangle^p\,.$$

Montrons enfin que $\mathcal{F}E = v$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors d'après le théorème d'intégration sous le crochet, on a

$$\begin{aligned}
\langle v, \varphi \rangle &= \int v(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi \\
&= \int \langle E, e_\xi \rangle \varphi(\xi)\, d\xi \\
&= \langle E, \int e_\xi \varphi(\xi) d\xi \rangle \\
&= \langle E, \mathcal{F}\varphi \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}E, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition. □

Proposition C.5.2. *Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution tempérée. Alors*

a) Si S est à symétrie hermitienne (au sens où $\check{S} = \overline{S}$) alors $\mathcal{F}S$ est réelle ;

b) Si S est paire (resp. impaire) alors $\mathcal{F}S$ est paire (resp. impaire) ;

c) Si τ_a est la translation de vecteur a alors

$$\mathcal{F}(\tau_a S)(\xi) = e^{ia\cdot\xi}\mathcal{F}S(\xi)\,;$$

d) Si h_λ est la dilatation de rapport λ alors

$$\mathcal{F}(h_\lambda S) = |\lambda|^{-d} h_{\lambda^{-1}}\mathcal{F}S\,;$$

e) Si $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors on a dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{F}(E \star S) = \mathcal{F}E\, \mathcal{F}S\,.$$

f) Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors on a dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{F}(\varphi S) = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}\varphi \star \mathcal{F}S\,.$$

Démonstration. Nous ne démontrons que les deux derniers points, les autres sont à traiter en exercice.

e) Nous allons commencer par traiter le cas particulier de la convolution d'une distribution E de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction ψ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On sait par la Proposition B.7.3 que $E \star \psi$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On écrit alors, grâce au Théorème B.4.9 d'intégration sous le crochet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(E \star \psi)(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi}\langle E, \psi(x - \cdot)\rangle\, dx \\
&= \big\langle E, \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(x - \cdot)\, dx \big\rangle\,.
\end{aligned}$$

Mais

$$\int e^{-ix\cdot\xi}\psi(x-y)\, dx = \mathcal{F}\psi(\xi)e^{-iy\cdot\xi}\,.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(E \star \psi)(\xi) &= \langle E, \mathcal{F}\psi(\xi)e_\xi \rangle \\
&= \mathcal{F}\psi(\xi)\langle E, e_\xi \rangle \\
&= \mathcal{F}\psi(\xi)\, \mathcal{F}E(\xi)\,,
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé. Considérons maintenant le cas général de la convolution de E par $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On remarque que $E \star S$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ grâce à la Proposition B.7.5. Par ailleurs $\mathcal{F}S$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}E$ est une fonction de classe C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées donc (toujours par la Proposition B.7.5), la distribution $\mathcal{F}E\,\mathcal{F}S$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{F}(E\star S)=\mathcal{F}E\,\mathcal{F}S$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}(S\star E),\varphi\rangle &= \langle S\star E,\mathcal{F}\varphi\rangle\\ &= \langle S,\check{E}\star\mathcal{F}\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Mais on vérifie facilement que

$$\overline{\mathcal{F}}(\check{E}\star\mathcal{F}\varphi)=\mathcal{F}(E\star\overline{\mathcal{F}}\varphi)$$

donc par le théorème d'inversion de Fourier appliqué à $\check{E}\star\mathcal{F}\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ il vient

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}(S\star E),\varphi\rangle &= \langle S,\mathcal{F}\mathcal{F}(E\star(\mathcal{F}^{-1}\varphi))\rangle\\ &= \langle\mathcal{F}S,\mathcal{F}(E\star(\mathcal{F}^{-1}\varphi))\rangle\,.\end{aligned}$$

Le cas particulier traité ci-dessus permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(E\star(\mathcal{F}^{-1}\varphi)) &= \mathcal{F}E\,\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)\\ &= \mathcal{F}E\,\varphi\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}(S\star E),\varphi\rangle &= \langle\mathcal{F}S,\mathcal{F}E\,\varphi\rangle\\ &= \langle\mathcal{F}S\,\mathcal{F}E,\varphi\rangle\end{aligned}$$

puisque $\mathcal{F}E\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et le résultat suit.

f) Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi S) &= (2\pi)^{-2d}\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi\,\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}S)\\ &= (2\pi)^{-2d}\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi\star\mathcal{F}S)\\ &= (2\pi)^{-d}\mathcal{F}\varphi\star\mathcal{F}S\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. □

Exemple (Transformation de Fourier de la masse de Dirac)**.** On a

$$\mathcal{F}\delta_0=1\quad\text{dans}\quad\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\,,$$

et plus généralement pour tout $a\in\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}\delta_a(\xi)=e^{-i\xi\cdot a}\,,\quad\xi\in\mathbb{R}^d\,.$$

En outre

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_0)(\xi)=(i\xi)^\alpha\,,\quad\xi\in\mathbb{R}^d\,,$$

et plus généralement pour tout $a\in\mathbb{R}^d$

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_a)(\xi)=(i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot a}\,,\quad\xi\in\mathbb{R}^d\,.$$

Exemple (Transformation de Fourier des polynômes)**.** On a

$$\mathcal{F}1=(2\pi)^d\delta_0\,,$$

et

$$\mathcal{F}x^\alpha=(2\pi)^d i^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta_0\,.$$

C.6. Espaces de Sobolev

C.6.1. Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$.

Définition C.6.1 (Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$)**.** *Soit s un nombre réel. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des distributions tempérées f telles que*

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d; \langle\xi\rangle^{2s}\, d\xi)\,.$$

On pose alors

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s} |\mathcal{F}f(\xi)|^2\, d\xi\,.$$

L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des distributions tempérées f telles que $\mathcal{F}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s}\, d\xi)\,.$$

On pose

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}f(\xi)|^2\, d\xi < +\infty\,.$$

Proposition C.6.2. *Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(f\,|\,g)_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\, d\xi\,.$$

Les espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ sont des espaces des Hilbert pour le produit scalaire

$$(f\,|\,g)_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\, d\xi$$

si et seulement si $s < d/2$.

Démonstration. Le cas des espaces inhomogènes $H^s(\mathbb{R}^d)$ se traite en remarquant que la transformée de Fourier est un isomorphisme isométrique entre $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d; \langle\xi\rangle^{2s}\, d\xi)$.

Dans le cas des espaces homogènes commençons par supposer que $s < d/2$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s}\, d\xi)$ donc il existe une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s}\, d\xi)$ telle que la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s}\, d\xi)$. Montrons que φ est une distribution tempérée, que $f := \mathcal{F}^{-1}\varphi$ appartient à $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. Puisque $s < d/2$ on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{B(0,1)} |\varphi(\xi)|\, d\xi \le \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\varphi(\xi)|^2\, d\xi\Big)^{\frac12} \Big(\int_{B(0,1)} |\xi|^{-2s}\, d\xi\Big)^{\frac12} < \infty\,.$$

On en déduit que $\mathbf{1}_{B(0,1)}\varphi$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$ et donc que $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,1)}\varphi)$ est bornée. Comme $\mathbf{1}_{^cB(0,1)}\varphi$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d; \langle\xi\rangle^{2s}\, d\xi)$ on obtient que φ est une distribution tempérée. Soit $f := \mathcal{F}^{-1}\varphi$, alors f appartient à $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et on a bien que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ puisque $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s}\, d\xi)$. Donc $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est complet si $s < d/2$.

Dans le cas où $s \ge d/2$ on considère la fonction sur $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$

$$\phi : f \longmapsto \|\widehat{f}\|_{L^1(B(0,1))} + \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}\,.$$

On constate facilement que ϕ est une norme sur $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et que $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach pour cette norme. En considérant l'application identité

$$(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \phi) \longrightarrow \Big(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}\Big)$$

qui est linéaire, continue et surjective on constate que si l'espace $\big(\dot H^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}\big)$ était complet, alors il existerait par le théorème de l'application ouverte une constante C telle que

$$\forall f \in \dot H^s(\mathbb{R}^d)\,,\quad \phi(f) \leq C\|f\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}\,,$$

ce qui impliquerait que

$$\exists C > 0\,,\quad \forall f \in \dot H^s(\mathbb{R}^d)\,,\quad \|\widehat f\|_{L^1(B(0,1))} \leq C\|f\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Nous allons montrer que cette inégalité est fausse grâce à l'exemple suivant : soit $\mathcal{C}$ une couronne de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0, incluse dans la boule unité $B(0,1)$, telle que $\mathcal{C} \cap 2\mathcal{C} = \emptyset$ et soit la suite

$$f_n := \mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{q=1}^n \frac{2^{q(s+\frac{d}{2})}}{q}\mathbf{1}_{2^{-q}\mathcal{C}}\Big)\,.$$

Alors l'hypothèse $\mathcal{C} \cap 2\mathcal{C} = \emptyset$ permet d'écrire que

$$\|\widehat{f_n}\|_{L^1(B(0,1))} = C\sum_{q=1}^n \frac{2^{q(s-\frac{d}{2})}}{q}$$

et

$$\|f_n\|^2_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C\sum_{q=1}^n \frac{1}{q^2} \leq C'$$

et comme $s \geq d/2$ on en déduit que $\|\widehat{f_n}\|_{L^1(B(0,1))}$ tend vers l'infini avec n alors que $\|f_n\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}$ est bornée. La proposition suit. □

Exercice. Soient r, s et t trois réels.

a) Si $s < t$ alors $H^t(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ et cette inclusion définit une application linéaire continue : on a

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{H^t(\mathbb{R}^d)}\,,\quad \forall f \in H^t(\mathbb{R}^d)\,.$$

b) Si $r < s < t$ alors $\dot H^r \cap \dot H^t(\mathbb{R}^d) \subset \dot H^s(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\|f\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^{1-\theta}_{\dot H^r(\mathbb{R}^d)}\|f\|^{\theta}_{\dot H^t(\mathbb{R}^d)}\,,\quad \forall f \in \dot H^r \cap \dot H^t(\mathbb{R}^d)\,,$$

avec $s = (1-\theta)r + \theta t$.

c) L'application linéaire

$$f \in H^{-s}(\mathbb{R}^d) \longmapsto L_f \in \big(H^s(\mathbb{R}^d)\big)^*\,,$$

où L_f est la forme (anti)-linéaire définie par

$$L_f(\varphi) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)}\,d\xi\,,$$

est un isomorphisme linéaire isométrique entre l'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et le dual topologique $\big(H^s(\mathbb{R}^d)\big)^*$ de $H^s(\mathbb{R}^d)$.

d) Si $|s| < d/2$, l'application linéaire

$$f \in \dot H^{-s}(\mathbb{R}^d) \mapsto L_f \in \big(\dot H^s(\mathbb{R}^d)\big)^*$$

où L_f est la forme (anti)-linéaire définie par

$$L_f(\varphi) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)}\,d\xi$$

est un isomorphisme linéaire isométrique entre l'espace $\dot H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et le dual topologique $\big(\dot H^s(\mathbb{R}^d)\big)^*$ de $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$.

Proposition C.6.3. *Pour tout entier k, l'espace $H^k(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont toutes les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre k sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et l'on a*

$$\|f\|^2_{H^k(\mathbb{R}^d)} \sim \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} .$$

Démonstration. On rappelle que $\partial^\alpha f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $\xi^\alpha \mathcal{F}f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme pour tout entier k il existe une constante C telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$C^{-1}\Big(1+\sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2\Big) \leq \langle\xi\rangle^{2k} \leq C\Big(1+\sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2\Big),$$

la proposition suit. □

Proposition C.6.4. *Pour tout réel s, l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace dense de $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Pour tout réel $s < \dfrac{d}{2}$, l'espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dont la transformée de Fourier est identiquement nulle près de l'origine est un sous-espace dense de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ étant un espace de Hilbert, il suffit de vérifier que l'orthogonal de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour le produit scalaire de $H^s(\mathbb{R}^d)$ est réduit à $\{0\}$. Supposons donc qu'il existe une distribution f dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s}\mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}\varphi}(\xi) = 0 .$$

Alors l'application $\xi \mapsto \langle\xi\rangle^{2s}\mathcal{F}f(\xi)$ est identiquement nulle en tant que distribution tempérée, donc $\mathcal{F}f \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$.

De même supposons qu'il existe une distribution f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction φ de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}\mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)}\, d\xi = 0 .$$

Alors $\mathcal{F}f$ s'annule sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et donc $\mathcal{F}f \equiv 0$. Le résultat suit puisque $s < d/2$ et donc $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert. □

Proposition C.6.5. *La multiplication par une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une application continue de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même pour tout réel s.*

Démonstration. On sait que

$$\mathcal{F}(\varphi f) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}\varphi \star \mathcal{F}f$$

donc la démonstration de la proposition se réduit à l'estimation de la norme $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la fonction

$$u(\xi) := \langle\xi\rangle^s \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}\varphi(\xi-\eta)||\mathcal{F}f(\eta)|\, d\eta .$$

Vérifions tout d'abord que

$$\langle\xi\rangle^s \leq 2^{\frac{|s|}{2}}\langle\xi-\eta\rangle^{|s|}\langle\eta\rangle^s .$$

En effet quitte à échanger ξ et η on peut supposer que $s \geq 0$ et l'on a

$$\begin{aligned}\langle\xi\rangle^s &\leq \big(1+|\xi-\eta|^2+|\eta|^2\big)^{\frac{s}{2}}\\ &\leq 2^{\frac{s}{2}}\langle\xi-\eta\rangle^s\langle\eta\rangle^s .\end{aligned}$$

On a donc

$$|u(\xi)| \leq 2^{\frac{|s|}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi - \eta \rangle^{|s|} |\mathcal{F}\varphi(\xi - \eta)| \langle \eta \rangle^s |\mathcal{F}f(\eta)| \, d\eta$$

et l'inégalité de Young

$$\|g \star h\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^1} \|h\|_{L^2} \tag{C.3}$$

permet de conclure que

$$\|\varphi f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq 2^{\frac{|s|}{2}} \big\| \langle \xi \rangle^{|s|} \mathcal{F}\varphi \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \,.$$

L'inégalité (C.3) s'obtient en remarquant que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, par les théorèmes de Fubini et Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int g \star h(x)\, f(x) \, dx &= \iint g(y) h(x-y) f(x) \, dx dy \\
&\leq \int |g(y)| \int |h(x-y)| \, |f(x)| \, dx dy \\
&\leq \|f\|_{L^2} \|h\|_{L^2} \int |g(y)| \, dy = \|f\|_{L^2} \|h\|_{L^2} \|g\|_{L^1} \,.
\end{aligned}$$

La proposition est démontrée. □

C.6.2. Injections de Sobolev.

Théorème C.6.6 (Injections de Sobolev - le cas C^k)**.** *Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier. Pour tout réel $s > \frac{d}{2} + k$ on a*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d) \,.$$

Plus précisément toute fonction $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ est égale presque partout à une fonction de $C^k(\mathbb{R}^d)$, et il existe une constante C ne dépendant que de d, k et s telle que pour toute fonction $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)| \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \,.$$

Démonstration. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$. Comme $s > \frac{d}{2} + k$, la fonction

$$\xi \longmapsto \frac{(i\xi)^\alpha}{\langle \xi \rangle^s}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}f = \frac{(i\xi)^\alpha}{\langle \xi \rangle^s} \langle \xi \rangle^s \mathcal{F}f$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$. On en déduit que la distribution tempérée $\partial^\alpha f$ est en fait une fonction continue et

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) \, d\xi$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On a alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)| \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \,,$$

avec

$$C := \frac{1}{(2\pi)^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2(k-s)} \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \,.$$

Le théorème est démontré. □

Théorème C.6.7 (Injections de Sobolev - le cas L^p)**.** *Si $s \in]0, d/2[$ alors les espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ sont continûment inclus dans $L^{\frac{2d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Tout d'abord notons que si $s>0$ alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ est continûment inclus dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ donc il suffit de montrer le résultat pour $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. On remarque ensuite qu'un argument d'échelle permet de trouver l'exposant $p = 2d/(d-2s)$. Soit en effet f une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et posons f_ℓ la fonction $f_\ell(x) := f(\ell x)$ (avec $\ell > 0$). Pour tout $p \in [1,\infty[$ on a (grâce à la Proposition C.5.2 d))

$$
\begin{aligned}
\|f_\ell\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \ell^{-\frac{d}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \text{et}\\
\|f_\ell\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}f_\ell(\xi)|^2\,d\xi\\
&= \ell^{-2d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}f(\ell^{-1}\xi)|^2\,d\xi\\
&= \ell^{-d+2s}\|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}\,.
\end{aligned}
$$

Si l'inégalité $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$ est vraie pour toute fonction régulière f, elle est vraie aussi pour f_ℓ pour tout $\ell > 0$.Cela conduit à la relation $p = 2d/(d-2s)$.

Démontrons à présent le théorème. On va supposer que f est une fonction de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ (le résultat suivra par densité) et pour simplifier les calculs on suppose sans perte de généralité que $\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = 1$.

Commençons par observer que pour tout $p \in [1,+\infty[$, grâce au théorème de Fubini on a pour toute fonction mesurable f,

$$
\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\\
&= p\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^{|f(x)|} \Lambda^{p-1} d\Lambda dx\\
&= p\int_0^\infty \Lambda^{p-1}\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}^d / \, |f(x)| > \Lambda\right\}\right) d\Lambda\,,
\end{aligned}
$$

où μ est la mesure de Lebesgue. Nous allons décomposer (pour chaque Λ) f en basses et hautes fréquences en écrivant $f = f_{1,A} + f_{2,A}$, avec

$$
f_{1,A} := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)}\mathcal{F}f) \quad \text{et} \quad f_{2,A} := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{^cB(0,A)}\mathcal{F}f)\,, \tag{C.4}
$$

où $A > 0$ sera déterminée plus tard. Comme le support de la transformée de Fourier de $f_{1,A}$ est compact, la fonction $f_{1,A}$ est bornée. On a plus précisément par la transformée de Fourier inverse et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
\|f_{1,A}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq (2\pi)^{-d}\|\mathcal{F}f_{1,A}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq (2\pi)^{-d}\int_{B(0,A)} |\xi|^{-s}|\xi|^s|\mathcal{F}f(\xi)|d\xi\\
&\leq (2\pi)^{-d}\left(\int_{B(0,A)}\frac{d\xi}{|\xi|^{2s}}\right)^{\frac12}\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}\,.
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\|f_{1,A}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C_s A^{\frac{d}{2}-s}\,. \tag{C.5}
$$

Par l'inégalité triangulaire on a

$$
\left\{x\in\mathbb{R}^d / \, |f(x)|>\Lambda\right\} \subset \left\{x\in\mathbb{R}^d / \, 2|f_{1,A}(x)|>\Lambda\right\} \cup \left\{x\in\mathbb{R}^d / \, 2|f_{2,A}(x)|>\Lambda\right\}\,.
$$

Grâce à (C.5) on a

$$
A = A_\Lambda := \left(\frac{\Lambda}{4C_s}\right)^{\frac{p}{d}} \Longrightarrow \mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}^d / \, |f_{1,A_\Lambda}(x)| > \Lambda/2\right\}\right) = 0\,.
$$

On en déduit que

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq p\int_0^\infty \Lambda^{p-1}\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}^d /\, |f_{2,A_\Lambda}(x)| > \Lambda/2\right\}\right)\, d\Lambda\,.$$

Il est bien connu (c'est l'inégalité de Bienaimé–Tchebychev) que

$$\begin{aligned}\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}^d /\, |f_{2,A_\Lambda}(x)| > \Lambda/2\right\}\right) &= \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^d /\, |f_{2,A_\Lambda}(x)|>\Lambda/2\right\}} dx\\ &\leq \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^d /\, |f_{2,A_\Lambda}(x)|>\Lambda/2\right\}} \frac{4|f_{2,A_\Lambda}(x)|^2}{\Lambda^2}\, dx\\ &\leq \frac{4}{\Lambda^2}\|f_{2,A_\Lambda}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq 4p\int_0^\infty \Lambda^{p-3}\|f_{2,A_\Lambda}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\, d\Lambda\,,$$

et donc

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq 4p(2\pi)^{-d}\int_0^\infty \Lambda^{p-3}\int_{|\xi|\geq A_\Lambda} |\mathcal{F}f(\xi)|^2\, d\xi d\Lambda\,. \tag{C.6}$$

Par définition de A_Λ on a

$$|\xi| \geq A_\Lambda \Longleftrightarrow \Lambda \leq 4C_s|\xi|^{\frac{d}{p}}\,.$$

Alors le théorème de Fubini implique que

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leq 4p(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^{4C_s|\xi|^{\frac{d}{p}}} \Lambda^{p-3}d\Lambda\right)|\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi\\ &\leq \frac{4p}{p-2}(2\pi)^{-d}\left(4C_s\right)^{p-2}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\frac{d(p-2)}{p}}|\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi\,.\end{aligned}$$

Comme $2s = \dfrac{d(p-2)}{p}$ le théorème est démontré par densité de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Par dualité on peut démontrer le corollaire suivant.

Corollaire C.6.8. *Si p appartient à $]1,2]$, alors*

$$L^p(\mathbb{R}^d) \subset \dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \quad \textit{avec} \quad s = -d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\cdot$$

Démonstration. Notons que puisque p appartient à $]1,2]$, alors $-d/2 < s \leq 0$. Écrivons

$$\|a\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\|\varphi\|_{\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)}\leq 1}\langle a,\varphi\rangle.$$

Comme $-s = d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}\right) = d\left(\dfrac{1}{2} - \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\right)$, on a $\|\varphi\|_{\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)} \geq C\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}$, et donc

$$\begin{aligned}\|a\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} &\leq C\sup_{\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\leq 1}\langle a,\varphi\rangle\\ &\leq C\|a\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

Cela conclut la démonstration. $\square$

C.6.3. Trace et relèvement.

Théorème C.6.9 (Théorème de trace et relèvement)**.** *Soit $d \geq 2$ et $s > 1/2$. L'application linéaire (dite de trace)*

$$\begin{aligned} \gamma : \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1}) \\ f &\longmapsto \gamma(f) \end{aligned}$$

avec

$$\gamma(f)(x_1, \ldots, x_{d-1}) := f(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0)$$

se prolonge en une application linéaire continue surjective

$$\gamma : H^s(\mathbb{R}^d) \longrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}),$$

et il existe une application linéaire continue (dite de relèvement)

$$R : H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^d)$$

telle que $\gamma \circ R = Id_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}$.

Démonstration. Notons $x' := (x_1, \ldots, x_{d-1})$. On a pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|\gamma(f)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} = \left\| \langle \xi' \rangle^{s-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\gamma(f)) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$$

et

$$\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi_d\,.$$

En effet

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-ix'\cdot\xi'} f(x',0)\, dx' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-ix'\cdot\xi'} \Big(\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}_{x_d \to \xi_d} f)(x', \xi_d)\, d\xi_d \Big)\, dx' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi_d\,. \end{aligned}$$

Mais par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi_d \Big|^2 &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\mathcal{F}f(\xi)|^2\, d\xi_d \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_d}{\langle \xi \rangle^{2s}} \Big) \\ &\leq C \Big(\int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\mathcal{F}f(\xi)|^2\, d\xi_d \Big) \langle \xi' \rangle^{1-2s} \end{aligned}$$

avec

$$C := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta}{\langle \zeta \rangle^{2s}}$$

et donc puisque $s > 1/2$ il vient

$$\|\gamma(f)\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq C' \|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,.$$

On conclut par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ que l'opérateur de trace γ peut bien être défini sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ et que son image est dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$. Pour montrer que γ est surjective définissons un opérateur de relèvement

$$R : H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{tel que} \quad \gamma \circ R = \mathrm{Id}\,.$$

Pour cela on considère une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$ et l'on pose, pour v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$,

$$\begin{aligned} Rv(x) &:= \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{ix'\cdot\xi'} \chi(x_d\langle\xi'\rangle)\mathcal{F}v(\xi')\, d\xi' \\ &= \mathcal{F}^{-1}_{\xi'\to x'}\big(\chi(x_d\langle\xi'\rangle)\mathcal{F}v(\xi')\big)\,. \end{aligned}$$

On a clairement $\gamma \circ Rv = v$ et

$$\mathcal{F}(Rv)(\xi) = \frac{1}{\langle\xi'\rangle}(\mathcal{F}_{x_d\to\xi_d}\chi)\Big(\frac{\xi_d}{\langle\xi'\rangle}\Big)\mathcal{F}v(\xi')\,,$$

donc

$$\|Rv\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi'\rangle^{-2}\big|(\mathcal{F}_{x_d\to\xi_d}\chi)(\langle\xi'\rangle^{-1}\xi_d)\big|^2 |\mathcal{F}v(\xi')|^2\, d\xi\,.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \|Rv\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} &\le \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \langle\xi'\rangle^{-2s-1}\langle\xi\rangle^{2s}(\mathcal{F}_{x_d\to\xi_d}\chi(\langle\xi'\rangle^{-1}\xi_d)\, d\xi_d\Big)\langle\xi'\rangle^{2s-1}|\mathcal{F}v(\xi')|^2\, d\xi' \\ &\le C\|v\|^2_{H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^{d-1})} \end{aligned}$$

avec

$$C := \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}\chi(\zeta)|^2\langle\zeta\rangle^{2s}\, d\zeta\,.$$

Le théorème est démontré. □

Remarque. On peut définir plus généralement un opérateur de trace pour toute hypersurface régulière Σ de $\mathbb{R}^d$ en utilisant la stabilité de $H^s(\mathbb{R}^d)$ par composition par des difféomorphismes (non démontrée ici) ansi que la Proposition C.6.5 qui permettent de localiser et redresser le bord.

C.6.4. Espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition C.6.10 (Espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, k un entier, et p un réel dans $[1,\infty]$. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{k,p}(\Omega) := \Big\{f \in L^p(\Omega)\,/\,\partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \le k\Big\}\,.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

On montre facilement que $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, réflexif si $1 < p < \infty$ et séparable si $1 \le p < \infty$. L'espace de Sobolev $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire

$$(f|g)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le k} (\partial^\alpha f|\partial^\alpha g)_{L^2(\Omega)}\,.$$

L'espace suivant est particulièrement utile.

Définition C.6.11. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $H^1_0(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$. L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $H^1_0(\Omega)$ au sens où*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\varphi\in H^1_0(\Omega)\,,\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\le 1} \langle f, \varphi\rangle\,.$$

Proposition C.6.12 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante C telle que pour toute fonction f de $H^1_0(\Omega)$ on ait*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. On écrit tout élément $x \in \Omega$ sous la forme $x = (x', x_d)$ avec $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et on a

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x_d} \partial_{y_d} f(x', y_d)\, dy_d$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient (parce que Ω est borné)

$$|f(x)|^2 \leq C \int |\nabla f(x', y_d)|^2\, dy_d$$

et le résultat suit par intégration, et par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$. □

Proposition C.6.13 (Inégalités de Gagliardo–Nirenberg)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $p \in [2,\infty[$ tel que $1/p > 1/2 - 1/d$. Il existe une constante C telle que pour toute fonction f dans $H^1_0(\Omega)$,*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|^{1-\sigma}_{L^2(\Omega)}\|\nabla f\|^{\sigma}_{L^2(\Omega)} \quad \textit{avec} \quad \sigma = \frac{d(p-2)}{2p}\cdot \tag{C.7}$$

Démonstration. Par densité on peut supposer que f appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors les injections de Sobolev (Théorème C.6.7) impliquent que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{\dot H^{\frac{d(p-2)}{2p}}(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Par convexité des normes de Sobolev

$$\|f\|_{\dot H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^{1-\sigma}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|f\|^{\sigma}_{\dot H^1(\mathbb{R}^d)} \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in [0,1]\,,$$

on obtient le résultat. □

Les deux théorèmes suivants sont admis.

Théorème C.6.14. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord de classe C^m avec $m \geq 1$ un entier. Alors il existe un opérateur linéaire P de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ pour tout p dans $[1,\infty]$, tel que si $f \in W^{m,p}(\Omega)$ alors*

a) $Pf_{|\Omega} = f$,

b) $\|Pf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}$,

c) $\|Pf\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Ce théorème permet d'étendre les théorèmes d'injection de Sobolev au cas des ouverts bornés, en notant que si $s = d(1/2 - 1/p)$ alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\Omega)} &= \|Pf\|_{L^p(\Omega)}\\
&\leq \|Pf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq C\|Pf\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq C'\|f\|_{H^s(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi définir de tels opérateurs pour des domaines qui ne sont pas de classe C^m, par exemple un carré en dimension deux, par réflexions successives.

Théorème C.6.15. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord de classe C^m avec $m \geq 1$ un entier. Soit $1 \leq p < \infty$. Alors pour toute fonction $f \in W^{m,p}(\Omega)$ il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que f_n converge vers f dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Théorème C.6.16 (Théorème de Rellich)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord de classe C^1. Toute partie bornée de $H_0^1(\Omega)$ est d'adhérence compacte dans $L^2(\Omega)$.*

Remarque. Plus généralement on peut montrer que

— si $p < d$ alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [1, p^*[$ avec $1/d = 1/p - 1/p^*$,

— si $p = d$ alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [1, \infty[$,

— si $p > d$ alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ est compacte.

Démonstration. On ne va écrire la démonstration que dans le cas $d > 2$, le cas de la dimension 2 s'obtient de manière similaire (exercice).

Soit $\mathcal{A}$ une partie bornée de $H_0^1(\Omega)$ et soit $\alpha > 0$, montrons qu'il existe un nombre fini de boules de rayon α dans $L^2(\Omega)$ qui recouvrent $\mathcal{A}$. Commençons par choisir un ouvert ω relativement compact dans Ω tel que

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} \|f\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)} \leq \frac{\alpha}{3} \cdot \tag{C.8}$$

Ceci est possible grâce à l'inégalité de Sobolev qui implique que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)} &\leq |\Omega \setminus \omega|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}} \|f\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\leq |\Omega \setminus \omega|^{\frac{1}{d}} \|f\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

avec $1 = d(1/2 - 1/2^*)$.

Soit maintenant $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $|y| < d(\omega, \partial\Omega)$, pour $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \|\tau_y g - g\|_{L^1(\omega)} &\leq |y| \int_\omega \int_0^1 |\nabla g(x - ty)| \, dt dx \\ &\leq |y| \sqrt{|\Omega|} \, \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et donc par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \|\tau_y g - g\|_{L^2(\omega)} &\leq \|\tau_y g - g\|_{L^1(\omega)}^\theta \|\tau_y g - g\|_{L^{2^*}(\omega)}^{1-\theta} \\ &\leq |y|^\theta |\Omega|^{\frac{\theta}{2}} \, \|g\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{2} = \theta + \frac{1-\theta}{2^*} \cdot$$

Par densité on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} \|\tau_y f - f\|_{L^2(\omega)} \leq C|y|^\theta \, .$$

On en déduit qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < d(\omega, \partial\Omega)$ et tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \, , \quad |y| \leq \varepsilon \, , \quad \sup_{f \in \mathcal{A}} \|\tau_y f - f\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{\alpha}{3} \cdot \tag{C.9}$$

Soit maintenant χ_ε une suite régularisante au sens de la Définition B.1.1 (avec χ supportée dans la boule unité de $\mathbb{R}^d$), et soit

$$B_{\varepsilon,\omega} := \Big\{ (\chi_\varepsilon \star f)_{|\overline{\omega}} \, , \; f \in \mathcal{A} \Big\} \, .$$

Pour $f \in \mathcal{A}$ et $x \in \overline{\omega}$ on a

$$\big|\chi_\varepsilon \star f(x) - f(x)\big| \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |\chi_\varepsilon(y)| |\tau_{-y} f(x) - f(x)| \, dy$$

donc par l'inégalité de Jensen

$$\big|\chi_\varepsilon \star f(x) - f(x)\big|^2 \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |\chi_\varepsilon(y)|\, |\tau_{-y} f(x) - f(x)|^2 \, dy$$

et donc par (C.9) et le théorème de Fubini

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} \big\|\chi_\varepsilon \star f - f\big\|_{L^2(\omega)} \leq \sup_{f \in \mathcal{A}} \sup_{|y| \leq \varepsilon} \|\tau_{-y} f - f\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{\alpha}{3} \cdot \tag{C.10}$$

Enfin pour $f \in \mathcal{A}$ on a par l'inégalité de Hölder

$$\|\chi_\varepsilon \star f\|_{L^\infty(\overline{\omega})} \leq \|\chi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

et de même

$$\|\nabla(\chi_\varepsilon \star f)\|_{L^\infty(\overline{\omega})} \leq \|\nabla \chi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

donc $B_{\varepsilon,\omega}$ est uniformément bornée et équicontinue, donc par le théorème d'Ascoli elle est relativement compacte dans $C(\overline{\omega}; \mathbb{R})$ et donc dans $L^2(\omega)$. Il existe donc un entier N et des fonctions $g_1, \ldots, g_N$ de $L^2(\omega)$, que l'on prolonge par 0 à Ω, telles que

$$B_{\varepsilon,\omega} \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{L^2}(g_i, \frac{\alpha}{3})$$

et donc par (C.8) et (C.10)

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{L^2}(g_i, \alpha)\,.$$

Le théorème est démontré. □